Développement : Densité des fonctions continues nulle part dérivables

ANALYSE & PROBABILITÉS

Références : [QUE] QUEFFÉLEC H., ZUILY C., *Analyse pour l'agrégation, 4ème* ***édition***, Dunod, 2013, p270.
Pour 2-3 idées : [GX] GOURDON X., *Les maths en tête, Analyse, 2ème* ***édition***, ellipses, 2008, p401.

Pour les leçons :
- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de continues de $I := [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit F l'ensemble des fonctions de E dérivables nulle part.
On admet (à mettre dans le plan dans ce cas) que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. On admet également le théorème de BAIRE (à donner aussi dans le plan, et il faut en avoir une idée de la preuve).
Le but de ce développement est de montrer le théorème de densité suivant :

Théorème 1.
F est dense dans E.

PREUVE : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x-y|\}.$$

L'idée est d'appliquer le théorème de BAIRE en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un ouvert dense de E.
⋆ ÉTAPE 1 : Supposons avoir montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un ouvert dense de E. Posons :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

On a $A \subset E$ qui est complet, donc d'après le théorème de BAIRE, E est un espace de BAIRE. Comme A est une intersection dénombrable d'ouverts denses de E, A est dense dans E.
Montrons à présent que $A \subset F$. Soit $f \in A$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \in A_n$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \exists y_n \in [0,1] \quad |f(x) - f(y_n)| > n|x - y_n|. \tag{1}$$

Soit $x \in [0,1]$ et supposons par l'absurde que f soit dérivable en x. Alors, la fonction :

$$y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

serait continue sur $[0,1]$. Elle serait donc bornée :

$$\exists M' > 0 \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M'|x-y|.$$

Mais cela contredit (1). Donc $f \in F$. Comme A est dense dans E :

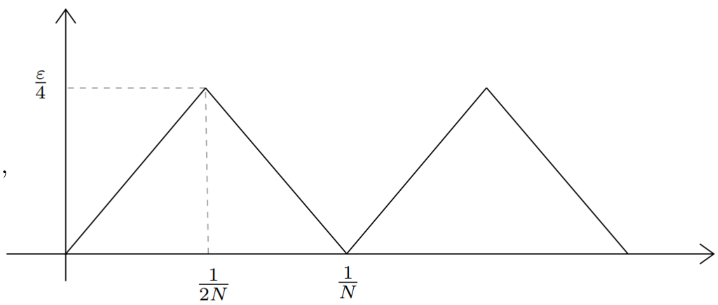
$$\boxed{F \text{ est dense dans } E.}$$

Il nous reste donc à montrer que les A_n sont bien des ouverts denses de E, ce qui terminera le développement. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
⋆ ÉTAPE 2 : Montrons que A_n est dense dans E. Pour cela, on va montrer que A_n est dense dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions polynomiales de E.

Soit $P \in \mathcal{F}$. **Fixons** $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose, conformément au schéma ci-contre :

$$\forall x \in [0,1] \quad g_p(x) = \begin{cases} \dfrac{N}{2p} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2N} \\ \dfrac{1}{2p}(1 - Nx) & \text{si } \dfrac{1}{2N} \leqslant x < \dfrac{1}{N} \end{cases},$$

et on prend g_p $\dfrac{1}{N}$-périodique.
Déjà, $g_p \in E$ (limites latérales en tout point finies et égales). Ensuite, par construction, $\|g_p\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{4p}$.



Ici, $\epsilon = \dfrac{1}{p}$.

Donc :

$$\|g_p + P - P\|_\infty < \frac{1}{p}.$$

On a prouvé que $(g_p + P)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers P pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il reste à prouver que $g_p + P \in A_n$.
Soit $x \in [0,1]$. On se donne $k \in [\![0; N-1]\!]$ tel que $x \in \left[\frac{k}{2N}; \frac{k+1}{2N}\right]$, et soit $y \in \left[\frac{k}{2N}; \frac{k+1}{2N}\right]$.
Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |g_p(x) + P(x) - g_p(y) - P(y)| &\geqslant ||g_p(x) - g_p(y)| - |P(x) - P(y)|| \\ &\geqslant |g_p(x) - g_p(y)| - |P(y) - P(x)| \\ &\geqslant \frac{N}{2p}|x-y| - \underbrace{\|P'\|_{\infty,[0,1]}}_{:=M}|y-x|, \end{aligned}$$

grâce à l'expression et g_p (en distinguant les cas k pair et impair) et à l'inégalité des accroissements finis. Donc :

$$|g_p(x) + P(x) - g_p(y) - P(y)| \geqslant \left(\frac{N}{2p} - M\right)|x-y|.$$

En prenant N assez grand tel que $\frac{N}{2p} - M > n$, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |g_p(x) + P(x) - g_p(y) - P(y)| > n|x-y|,$$

ce qui prouve que $g_p + P \in A_n$.
Donc A_n est dense dans $\mathcal{F}$.
Maintenant, soit $f \in E$, et soit $\varepsilon > 0$. Le théorème d'approximation de WEIERSTRASS affirme que $\mathcal{F}$ est dense dans E.
Donc :

$$\exists P \in \mathcal{F} \quad \|P - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme A_n est dense dans $\mathcal{F}$:

$$\exists g \in A_n \quad \|g - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$\|g - f\|_\infty \leqslant \|g - P\|_\infty + \|P - f\|_\infty < \varepsilon.$$

$$\boxed{A_n \text{ est par conséquent dense dans } E.}$$

⋆ ÉTAPE 3 : Montrons que A_n est ouvert.
Pour cela, on va montrer que $A_n^c := E \backslash A_n$ est fermé. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in A_n^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in E$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_p \in A_n^c$, donc :

$$\exists x_p \in [0,1] \quad \forall y \in [0,1] \quad |f_p(x_p) - f_p(y)| \leqslant n|x_p - y|.$$

Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in [0,1]$ qui est compact, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut en extraire une sous-suite convergente. On suppose donc que $x_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x \in [0,1]$ (quitte à remplacer $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par la suite extraite en question).
On va passer à la limite. Pour cela, pour $y \in [0,1]$, on écrit :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_p(x_p)| + \underbrace{|f_p(x_p) - f_p(y)|}_{\leqslant n|x_p - y| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} n|x-y|} + \underbrace{|f_p(y) - f(y)|}_{\leqslant \|f_p - f\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On a ensuite :

$$|f(x) - f_p(x_p)| \leqslant |f(x) - f(x_p)| + |f(x_p) - f_p(x_p)|.$$

Comme $x_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et que f est continue en x, on a $|f(x) - f(x_p)| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En outre,

$$|f(x_p) - f_p(x_p)| \leqslant \|f - f_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc :

$$\lim_{p\to+\infty} |f(x) - f_p(x_p)| = 0.$$

Ainsi, $|f(x) - f(y)| \leqslant n|x-y|$, ce qui prouve que $f \in A_n^c$, donc que A_n^c est fermé. Autrement dit :

$$\boxed{A_n \text{ est ouvert,}}$$

ce qui achève la preuve. □